Université de Tours - Faculté des Sciences

Master de Physique M1- $UE2$ Méthodes Numériques

17 Juin 2014

- **Les parties "Équations aux dérivées partielles" et "Transformées et Distributions" doivent être traitées sur DEUX COPIES SÉPARÉES.**
- Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
- Les documents manuscrits et polycopiés de cours sont autorisés.
- Il est demandé de justifier soigneusement toutes les réponses.
- Les téléphones portables doivent être éteints pendant l'épreuve.

Partie I: Équations aux dérivées partielles

Exercice 1

- Trouver la solution générale de l'EDP $u_x + u_y + 2u = 0$.
- Determiner les domaines d'ellipticité, les caractéristiques et la forme canonique de l'EDP

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} = 0.$$

Exercice 2

On considère l'EDP nonlinéaire

$$u_{tt} - u_{xx} + \kappa \left(a^2 - u^2\right)^3 u = 0,$$

où $\kappa > 0, a > 0$ notent deux paramètres constants. On s'intéresse à ses solutions de la forme $u(x,t) = f(x - vt)$ avec $-a < f(s) < a$ et $v > 1$.

- quelle équation differentielle vérifie $f(s)$?
- trouver la solution de cette équation vérifiant les conditions au bord

$$f(s \to \pm\infty) \to \pm a, \qquad f'(s \to \pm\infty) \to 0.$$

Partie II: Transformées et Distributions

Exercice 1

Calculer la Transformée de Fourier de la fonction $f(x) \equiv 1$ au sens des distributions. Commenter le résultat.

Exercice 2

a. Calculer la Transformation de Laplace (TL) de la fonction $y(x)$ qui satisfait l'équation différentielle

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a\frac{dy(t)}{dt} + by(t) - c\sin(t) = 0\,,$$

$a\,,b\,,c$ sont des constantes.
Rappel: $TL\{y(t)\}(s) \equiv Y(s) = \int_0^\infty dt\, y(t)\exp(-st)$.
b. Trouver la solution explicite pour $y(t)$ pour le cas $c = 0$, $a = 2$, $b = 1$.

Exercice 3

a. Calculer la Transformée de Fourier de l'équation différentielle:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - t^2y(t) = \lambda\, y(t)\,, \tag{1}$$

où $y(t)$ est dans l'espace des fonctions lisses à décroissance rapide $y(t) \in \mathcal{S}^\infty$, λ est constante. Commenter le résultat obtenu.
b. Démontrer que $y(t) = e^{-t^2/2}$ est une solution de l'équation (1) pour une valeur particulière de la constante λ. Laquelle?