# TD5

1. Considérons l'équation
$$u_{tt} - u_{xx} + m^2 \sin u = 0.$$
On s'intéresse à ses solutions de la forme $u(x,t) = f(px - Et + \delta)$ ou $E$, $p$ et $\delta$ sont 3 paramètres constants.

   - Quelle équation différentielle vérifie la fonction $f(s)$?
   - Montrer que cette équation est vérifiée par la fonction
   $$f(s) = 4 \operatorname{arctg} e^s,$$
   si $E$, $p$ et $m$ vérifient certaine relation remarquable qu'on explicitera. Les solitons de ce type s'appellent les "kinks".
   - Dessinez le graphe de $f(s)$, puis dessinez le profil du kink $f(px - Et + \delta)$ pour différentes valeurs de $t$. Que se passe-t-il avec $f(s)$ lorsque $s$ varie de $-\infty$ à $+\infty$?

2. Trouver une symétrie cachée de l'équation
$$u_t = u^2 u_x + u_{xxx}.$$
*Indication*: on pourra considérer
$$P(u, u_x, \ldots) = Au^4 u_x + Bu^2 u_{xxx} + Cuu_x u_{xx} + Du_x^3 + Eu_{5x},$$
avec $\deg u = 1$, $\deg u_x = 2$, ...

3. On considère l'équation
$$L\psi = k^2 \psi, \qquad L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u.$$
En cherchant la solution sous la forme
$$\psi = e^{kx} \left(1 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \ldots\right),$$
établir une relation de récurrence pour $\{w_j\}$.

4. Pour $f(x) = x$, calculer la forme explicite de $e^{\alpha x^2 \frac{\partial}{\partial x}} f(x)$.