TD2

1. Soit l'EDP
$$u_{xx} + u_{xy} = \sin x,$$
munie des conditions initiales $u(0,y) = y^2$, $u_x(0,y) = 0$. Déterminer le type de cette EDP, puis la résoudre.

2. Vérifiez directement que la fonction
$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi\left(\alpha\right) d\alpha$$
vérifie l'équation d'ondes $u_{tt} - u_{xx} = 0$ et les conditions initiales
$$\begin{cases} u(x, t=0) = \varphi(x), \\ u_t(x, t=0) = \psi(x). \end{cases}$$

3. Représenter graphiquement le profil de la corde pour différents valeurs de t pour
   - la déviation initiale $u(x, t=0) = 0$ et la vitesse initiale $u_t(x, t=0) = \psi_0$ pour $x \in (x_1, x_2)$ et nulle à l'extérieur de cette intervalle
   - les conditions initiales de la forme
   $$\varphi(x) = 0, \qquad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < c, \\ \frac{h}{2c^2} x(2c - x) & \text{pour } c < x < 2c, \\ 0 & \text{pour } x > 2c. \end{cases}$$

4. Montrer que la partie réelle et la partie imaginaire de toute fonction d'une variable complexe $z = x + iy$ vérifient séparément l'équation de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Vérifiez ce résultat explicitement en prenant $u(x,y) = \mathrm{Re}\, \sin \lambda z$.