TD4

1. Construire la fonction de Green pour pour l'équation de la chaleur non-homogène
$$u_t = u_{xx} + f(x,t),$$
munie des conditions initiales et conditions au bord homogènes
$$u(x, t=0) = u(x=0, t) = u(x=\ell, t) = 0.$$

2. Développer une méthode de construction de la solution du problème général
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t), \\ u(x, t=0) = \varphi(x), \\ u(x=0, t) = \mu(t), \\ u(x=\ell, t) = \nu(t), \end{cases}$$
en utilisant les résultats du cours (solution du Problème 1 et 2). En particulier, considérer le cas des conditions au bord stationnaires: $\mu(t) = \mu_0$, $\nu(t) = \nu_0$.

3. En utilisant la méthode de séparation de variables résoudre le problème sur $\mathbb{R}$:
$$u_t = u_{xx}, \qquad u(x, t=0) = \varphi(x).$$

4. Montrer que la solution de $u_t = u_{xx}$ sur $\mathbb{R}$ munie des conditions initiales
$$u(x, t=0) = \begin{cases} u_0 & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x < 0, \end{cases}$$
ne dépend que de la combinaison $z = \dfrac{x}{2\sqrt{t}}$. En introduisant la notation
$$u(x,t) = u_0 f(z)$$
avec z défini ci-dessus,
   - obtenir une équation différentielle ordinaire pour f,
   - donner les conditions fixant la solution de cette équation,
   - trouver f.