

# Université de Tours - Faculté des Sciences

Master de Physique M1- UE2 Méthodes Numériques

3 Juin 2013

- Les parties “Équations aux dérivées partielles” et “Transformées et Distributions” doivent être traitées sur **DEUX COPIES SÉPARÉES**.
- Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
- Les documents manuscrits et photocopiés de cours sont autorisés.
- Il est demandé de justifier soigneusement toutes les réponses.
- Les téléphones portables doivent être éteints pendant l'épreuve.

## Partie I: Équations aux dérivées partielles

### Exercice 1

Soit l'équation aux dérivées partielles (EDP) suivante:

$$u_{xy} + u_x = e^x.$$

- Déterminer le type de cette équation.
- Trouver sa solution générale.

### Exercice 2

En utilisant la méthode de la séparation des variables, trouver la solution de l'équation de la chaleur

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

vérifiant les conditions initiales  $u(x, t = 0) = \varphi(x)$  et les conditions au bord

$$u(-l/2, t) = u(l/2, t) = 0.$$

### Exercice 3

Montrer que la partie réelle et la partie imaginaire de toute fonction d'une variable complexe  $z = x + iy$  vérifient séparément l'équation de Laplace  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ . Vérifiez ce résultat explicitement en prenant  $u(x, y) = \operatorname{Re} \sin \lambda z$ .

## Partie II: Transformées et Distributions

### Exercice 1

Calculer la Transformée de Fourier (**TF**) de la Gaussienne  $e^{-x^2/2}$ , et commenter le résultat.

### Exercice 2

- a. Calculer la **TF** des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = xe^{-x^2/2}, \quad f_2(x) = x^2e^{-x^2/2}.$$

Indication: il convient d'utiliser que la **TF** de  $xe^{-x^2/2}$  est de la forme:  $(i\frac{d}{dk})e^{-k^2/2}$ , etc.

- b. Démontrer que la fonction  $\phi_2(x) = (x^2 - 1/2)e^{-x^2/2}$  est en fait une fonction propre de la **TF**:

$$\mathcal{F}[\phi_2](k) = \lambda\phi_2(k),$$

et trouver la valeur de  $\lambda$ .