TD3

1. Vérifiez directement que la fonction

$$v(t) = \int_0^t \frac{\sin \lambda(t - t')}{\lambda} f(t')\, dt'$$

vérifie l'équation

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \lambda^2 v = f(t)$$

et les conditions initiales $v(0) = v'(0) = 0$.

2. En utilisant le résultat précédent, représentez la solution d'équation d'ondes

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)$$

munie des conditions initiales $u(x, t = 0) = u_t(x, t = 0) = 0$ et les conditions au bord $u(x = 0, t) = u(x = \ell, t) = 0$, sous la forme

$$u(x,t) = \int_0^\ell \int_0^t G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau.$$

Autrement dit, trouvez l'expression pour la fonction de Green $G(x, \xi, t - \tau)$.

3. En utilisant la méthode de séparation de variables, trouver la solution de l'équation d'ondes $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)$ munie des conditions initiales

$$u(x, t = 0) = \varphi(x) \qquad u_t(x, t = 0) = \psi(x)$$

et décrivant les oscillations de la corde à extremités libres. Cette dernière condition se traduit mathématiquement par les conditions au bord

$$u_x(x = -\ell/2, t) = u_x(x = \ell/2, t) = 0.$$

4. Ecrire les relations d'orthogonalité pour les solutions de l'équation de Tchebichev

$$(1 - t^2) f'' - t f' + \lambda f = 0$$

sur l'intervalle $I = [-1, 1]$.