Université de Tours - Faculté des Sciences

Maîtrise de Physique - $UE2$ Méthodes Numériques

19 Décembre 2012

- **Les parties "Équations aux dérivées partielles" et "Transformées et Distributions" doivent être traitées sur DEUX COPIES SÉPARÉES.**
- Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
- Les documents manuscrits et polycopiés de cours sont autorisés.
- Il est demandé de justifier soigneusement toutes les réponses.
- Les téléphones portables doivent être éteints pendant l'épreuve.

Partie A: Équations aux dérivées partielles

Exercice 1

- Déterminez le domaine d'hyperbolicité, ellipticité et parabolicité de l'EDP

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0,$$

  et trouvez sa forme canonique dans le domaine d'ellipticité. Donnez la forme explicite des caractéristiques de cette EDP.
- Trouver la solution générale de l'EDP $u_{xy} + u_y = 1$.
- En utilisant la méthode de séparation de variables, trouver la solution de l'équation d'ondes $u_{tt} = u_{xx} + f(x,t)$ munie des conditions initiales

$$u(x, t = 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, t = 0) = \psi(x)$$

  et des conditions au bord $u(x = 0, t) = u_x(x = \ell, t) = 0$.

Exercice 2

Considérons l'équation

$$u_{tt} - u_{xx} + m^2 \sin u = 0.$$

On s'intéresse à ses solutions de la forme $u(x, t) = f(px - Et + \delta)$ ou E, p et δ sont 3 paramètres constants.

- Quelle équation différentielle vérifie la fonction $f(s)$?
- Montrer que cette équation est vérifiée par la fonction

$$f(s) = 4 \operatorname{arctg} e^s,$$

  si E, p et m vérifient certaine relation remarquable qu'on explicitera. Les solitons de ce type s'appellent les "kinks".
- Dessinez le graphe de $f(s)$, puis dessinez le profil du kink $f(px - Et + \delta)$ pour différentes valeurs de t. Que se passe-t-il avec $f(s)$ lorsque s varie de $-\infty$ à $+\infty$?

Partie B: Transformées et Distributions

Exercice 1

Soient les équations différentielles linéaires pour les fonctions $f_n = f_n(t)$

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} - t^2 f_n = (2n+1) f_n\,, \qquad \text{où } n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

On cherche les solutions de l'Eq. (1) dans l'espace $\mathcal{S}^\infty$, c.à.d. dans l'espace des fonction lisses à décroissance rapide.

a. Calculer la Transformée de Fourier (**TF**) de l'équation (1), et commenter le résultat.

b. On admet que pour chaque n la solution unique de l'Eq. (1) est de la forme: $f_n(t) = P_n(t) e^{-t^2/2}$ où $P_n(t)$ est un polynôme de degré n. Démontrer que f_n est en fait une fonction propre de la **TF**:

$$\mathcal{F}[f_n](k) = c_n f_n(k) \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Indication: il convient démontrer que la **TF** de $g_n(t) = t^n e^{-t^2/2}$ $n = 0, 1, 2 \ldots$ est de la forme:

$$\mathcal{F}[t^n e^{-t^2/2}](k) = \underbrace{\left(i\frac{d}{dk}\right)\left(i\frac{d}{dk}\right)\cdots\left(i\frac{d}{dk}\right)}_{n \text{ fois}} e^{-k^2/2} = Q_n(k) e^{-k^2/2}$$

où $Q_n(k)$ est un polynôme de degré n.