TD3

1. En utilisant la méthode de séparation de variables, trouver la solution de l'équation de chaleur $u_t = \lambda^2 u_{xx}$ munie des conditions initiales

$$u(x, t = 0) = \varphi(x), \qquad u(x = 0, t) = u(x = \ell, t) = 0.$$

2. Vérifiez directement que la fonction

$$v(t) = \int_0^t \frac{\sin \lambda (t - t')}{\lambda} f(t')\, dt'$$

vérifie l'équation

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \lambda^2 v = f(t)$$

et les conditions initiales $v(0) = v'(0) = 0$.

3. En utilisant le résultat précédent, représentez la solution d'équation de chaleur

$$u_t = \lambda^2 u_{xx} + f(x, t)$$

munie des conditions initiales/au bord

$$u(x, t = 0) = 0, \qquad u(x = 0, t) = u(x = \ell, t) = 0,$$

sous la forme

$$u(x, t) = \int_0^\ell \int_0^t G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau.$$

Autrement dit, trouvez l'expression pour la fonction de Green $G(x, \xi, t - \tau)$.