TD4

1. En utilisant la méthode de séparation de variables en coordonnées polaires, montrer que la résolution de l'équation de Helmholtz en dimension 2,

$$\left(\Delta + k^2\right)\psi = 0, \tag{1}$$

se réduit à la résolution de l'équation différentielle ordinaire

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \left(1 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)\right] f(r) = 0, \tag{2}$$

qui s'appelle l'équation de Bessel.

2. Montrer que les fonctions de Bessel $J_{\pm\nu}(r)$ définies par

$$J_\nu\left(r\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(1+k+\nu\right)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2k+\nu}, \tag{3}$$

vérifient l'équation (2).

3. Montrer que

   - $J_\nu(r)$ et $J_{-\nu}(r)$ sont linéairement indépendantes pour $\nu \notin \mathbb{Z}$ et que
   - pour $\nu \in \mathbb{Z}$, on peut prendre comme deux solutions indépendantes $J_\nu(r)$ et

   $$Y_\nu(r) = \frac{J_\nu(r)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(r)}{\sin\pi\nu}.$$

   Remarque: La fonction $Y_\nu(r)$ s'appelle la fonction de Neumann.

4. Montrer que, pour $\nu \in \mathbb{Z}$, la fonction de Bessel admet la représentation intégrale suivante:

$$J_\nu(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\nu\varphi - r\sin\varphi)}d\varphi.$$

Indication: développez $e^{-ir\sin\varphi}$ en série de Taylor et utilisez la formule de binôme de Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$.

5. En appliquant la méthode de séparation de variables à l'équation de Helmholtz en dimension 3 (en coordonnées sphériques), montrer qu'elle se réduit à l'équation de Bessel.
Indication: effectuez le changement de variables $\psi(r,\theta,\varphi) = r^{-1/2}\Psi(r,\theta,\varphi)$.