Université de Tours - Faculté des Sciences

Master de Physique M1- $UE2$ Méthodes Numériques

9 Janvier 2014

- **Les parties "Équations aux dérivées partielles" et "Transformées et Distributions" doivent être traitées sur DEUX COPIES SÉPARÉES.**
- Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
- Les documents manuscrits et polycopiés de cours sont autorisés.
- Il est demandé de justifier soigneusement toutes les réponses.
- Les téléphones portables doivent être éteints pendant l'épreuve.

Partie I: Équations aux dérivées partielles

Exercice 1

Trouver la solution générale des EDP suivantes:

1. $u_x + u_y + u_z = u$;
2. $u_t = uu_x$.
   Indication: calculer les dérivées partielles de $F(x + ut)$ par rapport à t et x, avec F une fonction arbitraire d'une seule variable).

Exercice 2

Déterminer le domaine d'hyperbolicité, les caractéristiques et la forme canonique de l'EDP

$$yu_{xx} + (x + y)u_{xy} + xu_{yy} = 0.$$

Exercice 3

On considère l'EDP

$$u_{tt} - u_{xx} = -2gu\left(a^2 - u^2\right),$$

où $g > 0, a > 0$ notent deux paramètres constants. On s'intéresse à ses solutions de la forme $u(x,t) = f(x - vt)$ avec $-1 < f(s) < 1$ et $v > 1$.

- quelle équation differentielle vérifie $f(s)$?
- trouver la solution de cette équation vérifiant les conditions au bord

$$f(s \to \pm\infty) \to \pm a, \qquad f'(s \to \infty) \to 0.$$

Partie II: Transformées et Distributions

Exercice 1

Démontrer que la Transformée de Fourier de la distribution vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ (où vp est la valeur principale) est donnée par:

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right](k) = -i\pi\,\mathrm{signe}(k) \qquad \mathrm{signe}(k) = \begin{cases} +1, & \text{si } k > 0; \\ 0, & \text{si } k = 0; \\ -1, & \text{si } k < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 2

On rappelle la Transformée de Hilbert d'une fonction $g(\tau)$

$$\mathbf{H}[g](t) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{vp}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{g(\tau)}{t-\tau}\,. \tag{2}$$

Démontrer la relation suivante entre la Transformée de Fourier de la fonction $g(\tau)$, $\mathcal{F}[g](k) = \hat{g}(k)$ et sa Transformée de Hilbert:

$$\mathcal{F}\left[\mathbf{H}[g]\right](k) = -i\,\mathrm{signe}(k)\hat{g}(k) \tag{3}$$

Exercice 3

Calculer la Transformée de Fourier de la fonction $f(x) \equiv 1$ au sens des distributions. Commenter le résultat.